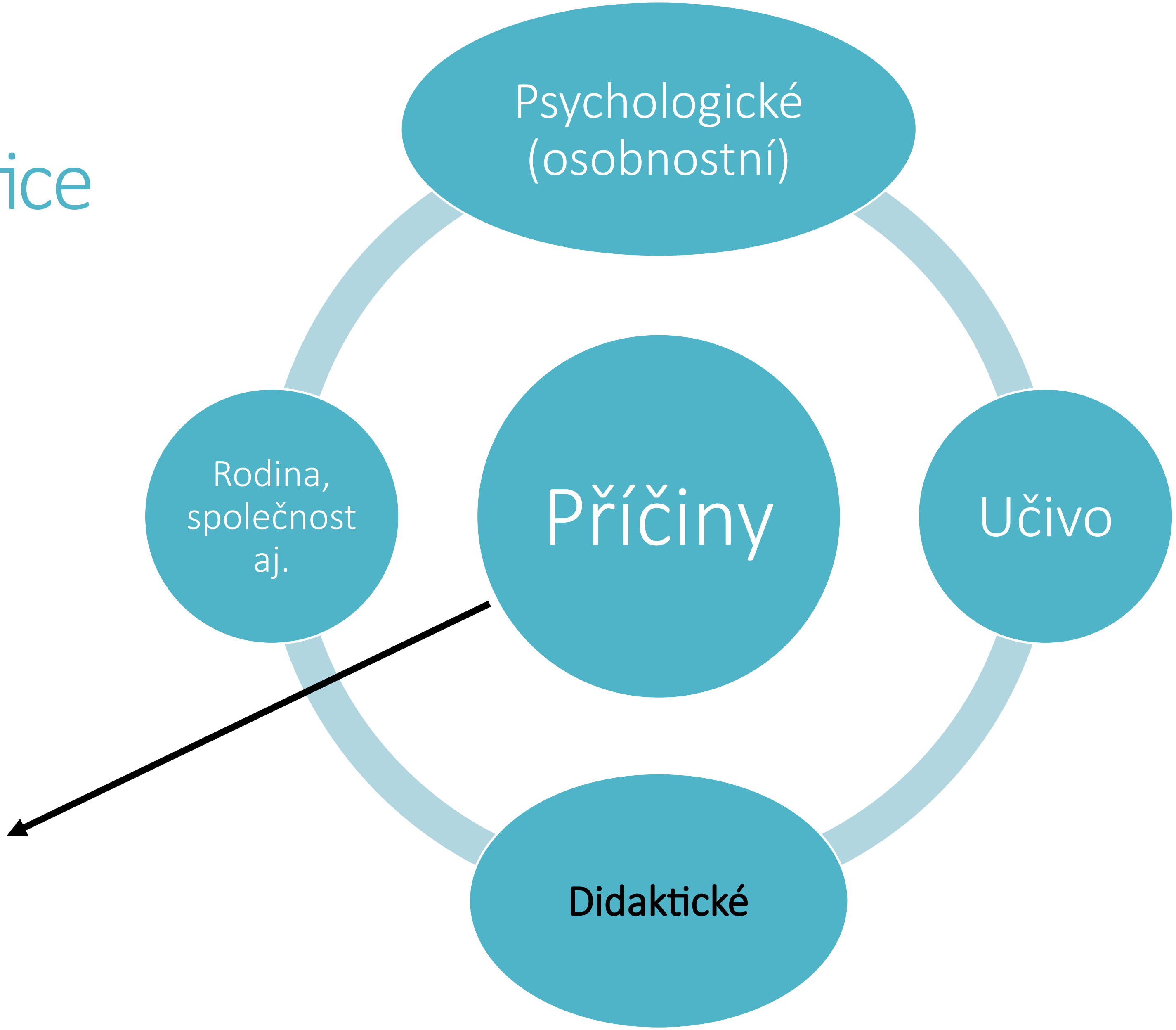
Jak může vypadat výuka matematiky, která přispívá k rozvoji myšlení?

Naďa Vondrová

Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova

nada.vondrova@pedf.cuni.cz

Obtíže žáků v matematice



Didaktické praktiky učitelů **nemohou** zabránit všem obtížím

Některé didaktické praktiky je mohou posílit – ty lze ovlivnit a má smysl se jimi zabývat.

Učitelovo dilema

Časová náročnost vs. efektivita: Je nejvíce efektivní to, co přináší rychlé výsledky?

Maximalizovat výkon v krátkodobém horizontu *(výklad a procvičování podobných typů úloh, učení se zpaměti)*

vs.

Maximalizovat učení v dlouhodobém horizontu (*produktivní selhávání, objevování jako příprava na učení*)

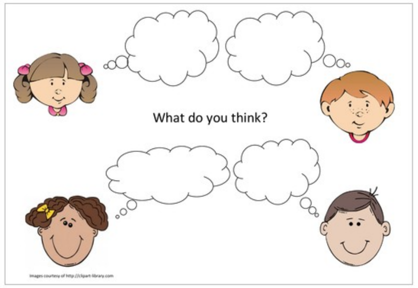
Hiebert, J., Grouws, D. A. (2007). **The effects of classroom mathematics teaching on students' learning.** In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

- Pojmy a vztahy jsou veřejné (teachers and pupils attend explictly to concepts)

Matematické souvislosti jsou „věc veřejná“:

- diskutuje se o významech, které jsou podstatou matematických postupů,
- kladou se otázky týkající se řešitelských strategií, v čem jsou podobné a v čem se liší,
- zvažují se způsoby, jak na sebe matematické problémy navazují, v čem se odlišují, v čem jsou jedinečné,
- pozornost se věnuje vztahům mezi matematickými myšlenkami,
- zvědomuje se žákům, v čem skví podstata hodiny a jak to navazuje na minulé hodiny a již známé myšlenky

Nezaměňovat s výkladem učitele



- Žáci vynakládají úsilí při řešení matematických problémů (pupils struggle with important mathematics)

žáci vynakládají úsilí, aby matematice porozuměli, aby zjistili něco, co není na první pohled patrné; jsou kognitivně aktivizováni

Kognitivní aktivizace

„Kognitivní aktivizace je výuková praktika, která podněcuje **žáky** k hlubšímu uvažování […]. Při kognitivně aktivizující výuce učitel vede **žáky** k tomu, aby odkrývali, vysvětlovali, sdíleli a konfrontovali své myšlenky, koncepty a metody řešení tím, že jim zadává náročné úkoly, dostává je do situací vedoucích ke kognitivním konfliktům a předkládá jim odlišné nápady, stanoviska, interpretace a řešení.“

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students’ understanding of Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, 19(6), 527–537.

Klíčová otázka: Dáváme žákům dostatek příležitostí, aby byli kognitivně aktivizováni?

Exponenciální rovnice (náslech)

= ; = ;= ; = ;= ; = ;= ; =

8.15: U. vyvolává žáky, ti přijdou k tabuli, zapíší vzorec na tabuli a vracejí se do lavice.

8.18: U. společně se třídou kontroluje správnost vzorců. U každého vzorce se zeptá třídy, zda je vzorec správně. Chybné vzorce následně sama opraví a zdůrazní, jak nesmírně důležitá je znalost vzorců na tabuli pro zvládnutí tak náročného učiva, jako jsou exponenciální rovnice.

8.23: Tabule

Exponenciální rovnice se vyznačují tím, že mají neznámou v exponentu.

Metoda řešení:

1) Levou a pravou stranu rovnice upravíme pomocí pravidel pro mocniny tak, abychom dostali na obou stranách rovnice mocniny se stejným základem.

2) Exponenty porovnáme.

8.26:

Řešte rovnici v oboru R, proveďte zkoušku:

= *64*

=

= 3

U. se zeptá třídy, zda má někdo návrh, jak danou rovnici řešit. Jeden žák navrhne vydělit rovnici čtyřmi. U. odpoví, že to nikam nepovede, a poradí žákům, ať si znovu přečtou definici. Zdůrazní, že je třeba upravit pravou stranu rovnice. Nikdo nic nenavrhuje, tak u. řešení prozradí.

Žákyně sedící přede mnou se šeptem zeptá souseda, proč je před trojkou mínus. Soused odpoví, že neví.

Kognitivní aktivizace

Kombinatorika (náslech)

Žáci začali probírat nové téma – kombinatorika. Paní učitelka problematiku uvedla na příkladech z jejich běžného života – budou si umět spočítat, kolika způsoby mohou zkombinovat svá trička a kalhoty, kolika způsoby se mohou dostat do školy apod.

Dále na projektoru ukázala pár příkladů, které ilustrovaly další možnosti kombinatoriky. Žáci byli velmi zaujatí, o tématu diskutovali. Bylo vidět, že jsou z problematiky nadšení a těší se, až začnou počítat. Některé dívky již zkoušely, kolika způsoby zkombinují boty a kalhoty.

Paní učitelka ovšem následně pustila na projektoru vzorečky, které žákům doporučila si zaznamenat, a začala je komentovat. Celý zbytek hodiny se potom nesl ve znamení vzorečků a vysvětlování „s opakováním“ a „bez opakování“.

Žáci velmi rychle ztratili nadšení a nezúčastněně si zapisovali do sešitů.

Kognitivní aktivizace

Produktivní selhávání (*productive failure*)

Výklad → Procvičování

Řešení problému (ne nutně korunované úspěchem) → Konsolidační fáze (výkladová)

Cílem komplexních úloh není, aby žáci sami objevili formální způsob řešení (učitel se tedy *nemusí* snažit je k němu navést), ale aby se *připravili* na naučení se tohoto způsobu.

Produktivní selhávání – výsledky napříč studiemi (Kapur, 2010, 2011, 2012, Sinha & Kapur, 2019, Schwarz & Martin, 2004)

Skupina:	PF produktivní selhání	FCPS řízené řešení komplexních problémů	LP výklad, procvičení
téma	průměrná rychlost		
typ úloh	komplexní		dobře strukturované
aktivity	přibližně stejný důraz na skupinovou i individuální práci		
řízení učitelem	odložené	průběžné	

- Experimentální skupiny dosahovaly lepších výsledků i ve standardních úlohách, v nichž byli žáci kontrolní skupiny trénováni.
- Experimentální skupiny dosahovaly lepších výsledků v konceptuálních znalostech a ve schopnosti transferu znalostí na jiný problém.
- Experimentální skupiny nebyly horší v procedurálních dovednostech než žáci kontrolní skupiny, kteří procvičovali řešení na více podobných úlohách.
- Čím více různých reprezentací a řešitelských strategií byli schopni žáci v experimentální skupině najít, tím lepších výsledků dosáhli v post-testu.

Produktivní selhávání: Proč to funguje

- PF staví na mnohých experimentálně vyzkoušených postupech, které ukazují, že je pro žáky přínosné, když před vlastním výkladem dostanou příležitost řešit úlohy i bez znalosti příslušných postupů
- PF je založené na myšlence, že žákovská originální produkce (strategie, postupy, reprezentace) je cenná pro jejich učení, pokud se vhodně propojí s konvenčními (formálními) postupy
- I když žáci nenašli správné řešení, byli **připraveni** na výklad učitele – matematické pojmy a metody jim vysvětlily to, co si intuitivně vytvořili, i kde a proč udělali chybu
- Žáci (i slabší) byli schopni lépe pochopit novou látku a také, proč oni sami nebyli v řešení úspěšní
- To je zřejmě důvodem, proč se tyto znalosti ukázaly jako trvalejší

Produktivní selhávání: Předpoklady

- úvodní problém by měl být dostatečně náročný, aby bylo co zkoumat, ale zase ne tolik, aby to žáci vzdali
- úvodní problém by měl být řešitelný více způsoby a měl by mít více reprezentací
- úvodní problém by měl aktivovat předchozí znalosti a dovednosti žáků (formální i neformální)
- ve druhé fázi by měl učitel navazovat na řešení, která vytvořili žáci, a dávat je do souvislosti s formálním řešením
- ve třídě jsou založeny takové socio-matematické normy, že se očekává, že se budou řešit problémy; žáci nespoléhají na výklad učitele
- součástí těchto norem i chápání chyby jako příležitosti k učení
- řešení ve skupinách není nezbytným předpokladem úspěšnosti (Brand, Hartmann, Loibl, Rummel, 2023)
- Navození **vytrvalosti** v práci žáků
- Křehká rovnováha mezi produktivním a neproduktivním selháváním (nebezpečí **frustrace**)

Problematika strategií řešení

socio-matematické normy

Záznam z náslechu od studenta učitelství: Probírá se přímá úměrnost. Řeší se úloha: **Šest čokolád stojí 144 Kč. Kolik Kč stojí pět stejných čokolád?**

Nejdříve se úloha vyřešila přes výpočet ceny jedné čokolády.

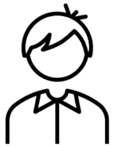
„Tak, a takhle jsme to dělali doteď. Ale my to odteď budeme řešit jinak, už ne takto. Ukážeme si takový fígl. Jmenuje se trojčlenka, protože známe tři čísla a chceme zjistit čtvrté.“

„Tak a teď pečlivě poslouchejte. Ta šipečka musí začínat tam, kde je to *x*. Odtud jako vycházíme. To je náš start. A jdeme nahoru. To je potřeba takhle udělat, aby vám to vyšlo.“

Následně učitel zapíše zadání úlohy do klasického schématu trojčlenky s příslušnými šipkami a sestaví příslušný výpočet.

„Opište si to. Takhle to teď totiž budeme dělat.“

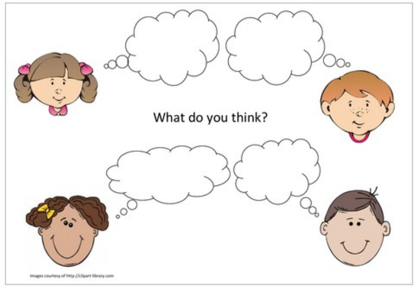
Po vyřešení další úlohy pomocí trojčlenky vznáší žák dotaz.



Ž: „Na co to mám dělat tak složitě, když jsem to vypočítal mnohem jednodušeji přes jeden kus?“

„No, on je to takový … algoritmus. To je prostě u složitějších příkladů, abys nemusel v matematice přemýšlet, tak si takto pomáháš. A takhle to teď budeme dělat, protože probíráme trojčlenku. Tak si to udělej ještě tou trojčlenkou, přesně, jak jsme si to ukazovali.“

Problematika strategií řešení



„Matematické pojmy a vztahy jsou veřejné: např. kladou se otázky týkající se řešitelských strategií, v čem jsou podobné a v čem se liší

- Výuka zahrnující prezentaci různých způsobů řešení a jejich vzájemné porovnávání má na porozumění žáků pozitivní vliv (např. Durkin, Star, Rittle-Johnson, 2017; Guo & Pang, 2011; Loibl & Leuders, 2018, 2019)
- Porovnávání řešitelských strategií „vedle sebe" je přínosnější než „po sobě" (Durkin et al., 2017)
- Pokud se sníží tempo výuky, mají z procesu porovnávání prospěch i žáci v matematice spíše slabší (Durkin et al., 2017)

Proč je porovnávání tak efektivní? Jedná se o základní kognitivní operaci při zpracování informací. Při **porovnávání neboli rozlišování** hledáme mezi různými údaji rozdíly. Doprovázíme to **generalizací**, což je opačná operace, jejímž cílem je naopak hledat podobnosti. Díky současnému používání generalizace a rozlišování můžeme jednotlivosti uspořádat do **kategorií** (vyšších celků), a nejsme zahlceni nadbytečným množstvím detailů. (A. Páchová, 2023)

Pozitivní důsledky učení se z chyb

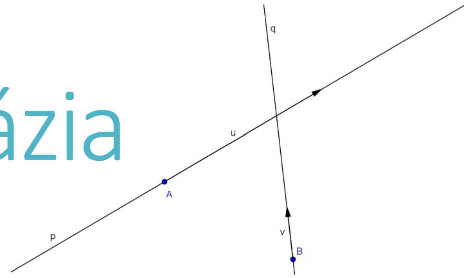
- Prokázáno v psychologii (např. Booth et al., 2017) i neurologii (v okamžiku chyby dochází v mozku k aktivitě)
- Prokázáno pro reflektování vlastních chyb i chyb, které jsou žákům předloženy jako např. řešení fiktivních žáků
- Konsistentní výsledek pro všechny žáky – pozitivní efekt **po časové prodlevě**
- Některé studie prokázaly větší přínos pro silnější žáky, jiné pro slabší žáky

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia
(z diplomové práce)

Hledá se vzájemná poloha dvou přímek. Parametrické vyjádření obou přímek je již zadáno. V prvním je použit parametr *t*, ve druhém parametr *s*.

U: „Protože budeme zkoumat, jestli je tato přímka (p) a tato přímka (q) totožná, tedy jsou to dvě parametrická vyjádření stejné přímky, tak si do té druhé nemůžu dosadit jako parametr také t, ale dosadím si tam jiné písmenko. Většinou se používá s.“

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia
(z diplomové práce)



Jiná třída. Učitel nechal žáky hledat vzájemnou polohu dvou přímek. Žáci si parametrická vyjádření sestavovali sami. Žáci z nákresu věděli, že přímky jsou různoběžné.

Žáci si u obou přímek zvolili stejný parametr *k* a dospěli pro *x*-ovou souřadnici k výsledku k = ½ a pro y-ovou souřadnici k výsledku k= −1/3.

U: „Co nám vyšlo? A co nám mělo vyjít?"

Ž: „Ten bod."

U: „Tak jaké má souřadnice?"

Ž: „Ten vektor, co je v přímce p, vynásobím tím, co nám vyšlo."

U: „A co nám vyšlo? Jedna polovina nebo mínus jedna třetina? Co ty čísla znamenají? Co nám mělo říci to k?"

Ž: „Jak roztáhneme ty vektory."

U: „A když nám vyšla dvě různá k, co to znamená?"

Výuka analytické geometrie u dvou učitelů gymnázia
(z diplomové práce)

Ž: „To k, které nám vyšlo z rovnice pro x, dosadíme do x-ové souřadnice a to druhé do y-ové souřadnice.“

U: „Počkej, vždyť tohle k musí být vždy stejné, ne? To mi říká, jak natáhnu ten vektor. Já nemůžu natahovat jinak x-ovou a jinak y-ovou souřadnici.“

Ž: „Tak dosadíme tu jednu polovinu do p a jednu třetinu do q, a když to bude stejné, tak máme ten bod.“

U: „A když to nebude stejné?“

Ž: „Tak jsme počítali špatně.“

U: „My jsme počítali špatně, ale v čem je tedy chyba?“

Hodina skončila. Problém zůstal otevřený do příští hodiny.

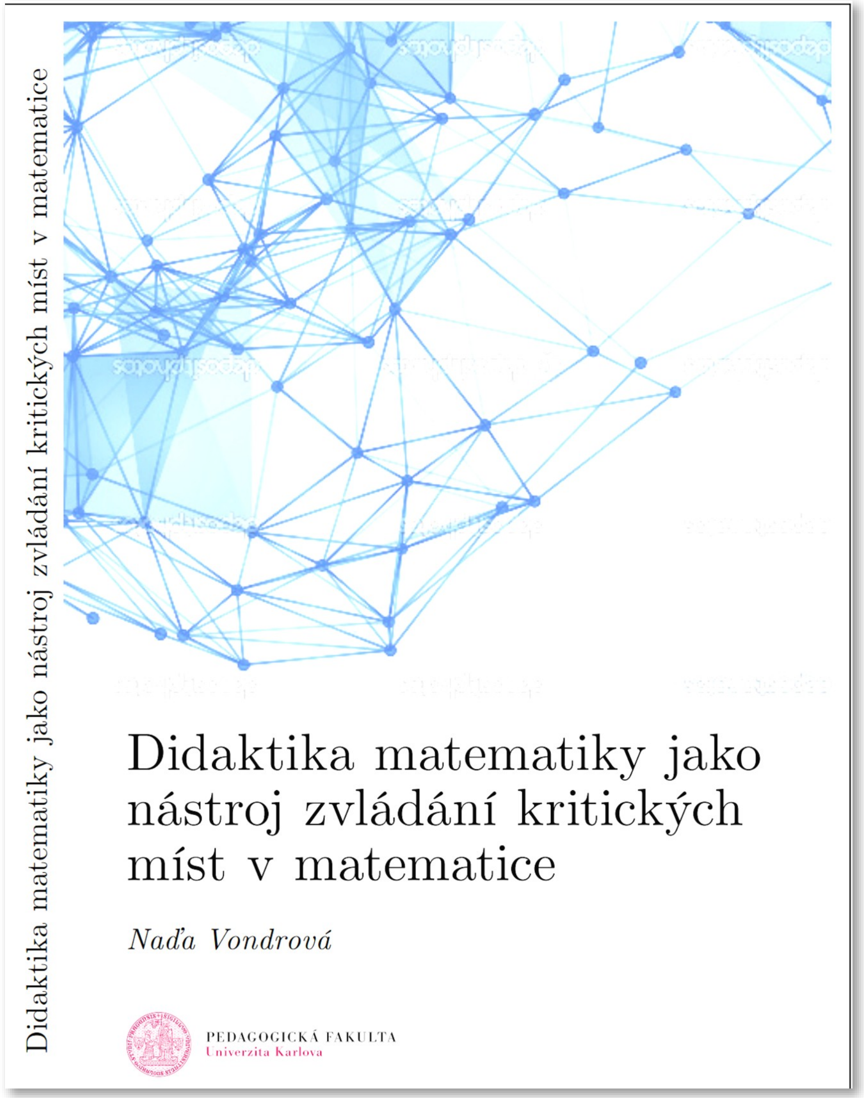
Předpoklady produktivního učení se z chyb (př. Steuer et al., 2013) – pohled žáků

- tolerance chyby ze strany učitele (chyba není pociťována jako něco a priori špatného)
- nevyužívání chyby pro hodnocení (fáze učení a hodnocení je z hlediska chyb oddělována)
- učitelova podpora po objevení chyby (vysvětlení, trpělivost a pomoc)
- absence negativní reakce na chybu (verbální i neverbální) ze strany učitele i žáků
- ochota žáků riskovat chybu
- analýza chyby (chyba je veřejně analyzována)
- využití chyby pro další učení

Steuer, G., Rosentritt-Brunn, G., & Dresel, M. (2013). Dealing with errors in mathematics classrooms: Structure and relevance of perceived error climate. *Contemporary Educational Psychology*, 38(3), 196–210. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.03.0

Závěrečné úvahy

- Rozvoj myšlení nebo spíše trénování paměti a aplikace jediného správného postupu?
- Má cenu věnovat čas zdlouhavému experimentování, které např. vede k objevu čísla pí, formulaci Pythagorovy věty či vět o shodných trojúhelnících, když je rychlejší tyto poznatky sdělit? Má takové experimentování přidanou hodnotu, která by tento čas ospravedlnila?



Děkuji za pozornost.